

3年4章 関数 $y = ax^2$ 「変域とグラフ」

1 問題と問題の意図

<問題> 右のグラフは、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ の一部である。このグラフについて、次の の値を求めよう。

x の変域

 $\leq x \leq$

y の変域 $\leq y \leq$

<問題の意図>

$y = ax^2$ で x の変域に応じた y の変域を求める問題は誤答が多い。そこでグラフから x と y の変域を読み取る問題を与え、誤答を生かすことで、いろいろな x の変域に応じた y の最大値と最小値を見つけて y の変域を求めることができるようにしたいと考えた。

2 本時の目標

$y = ax^2$ において、 x の変域に応じた y の変域の求め方を理解する。

3 授業の流れ

- (1) 最初にグラフ黒板でグラフだけを提示する。「どのような問題だと思おう？」と問い掛けると、グラフが途切れていることから、本時の問題が変域に関わるようだと気付く生徒が出てくる。

<問題>のプリントを配付する。なお、グラフの両端は●で、その点をふくんでいることを確認しておく。

- (2) 「 x の変域と y の変域を考え、□を求めよう」と伝え、3分程度取り組ませる。どこから考えてよいかわからない生徒のために、途中で x の変域の求め方を全体で確認し、 y の変域を考えさせる。

机間指導を通して生徒のノートから次のような2つの答えを把握しておく。

$$(\text{その1}) \quad 1 \leq y \leq \frac{9}{4}$$

$$(\text{その2}) \quad 0 \leq y \leq \frac{9}{4}$$

- (3) 意図的にはじめに(その1)の生徒を指名し、答えだけを発表させる。他の答えと全体に問い掛けると、(その2)の答えが出てくる。「どちらが正しいか？」という雰囲気になるので、「正しい y の変域の求め方を考えよう」を課題として板書する。
- (4) 1分程度隣同士で話し合わせた後、指名してそれぞれの考え方を板書させ、説明させる。

(その1)

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に}$$

$$x = -2 \text{ を代入して } y = 1$$

$$x = 3 \text{ を代入して } y = \frac{4}{9}$$

$$\text{だから } 1 \leq y \leq \frac{4}{9}$$

(その2)

グラフから y の最大値は $x = 3$ のときで、

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に代入して } y = \frac{4}{9}$$

y の最小値は $x = 0$ のときで $y = 0$

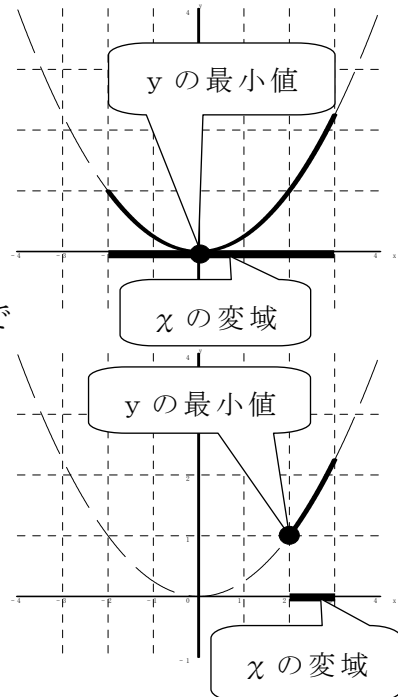
$$\text{だから } 0 \leq y \leq \frac{4}{9}$$

発表後に生徒とやりとりをしながら、(その1)の考え方は1次関数のときの y の変域の求め方であったことや、(その2)が正しいことをグラフと関連させながら y の変域の最小値と最大値に着目させて、全体で確認する。

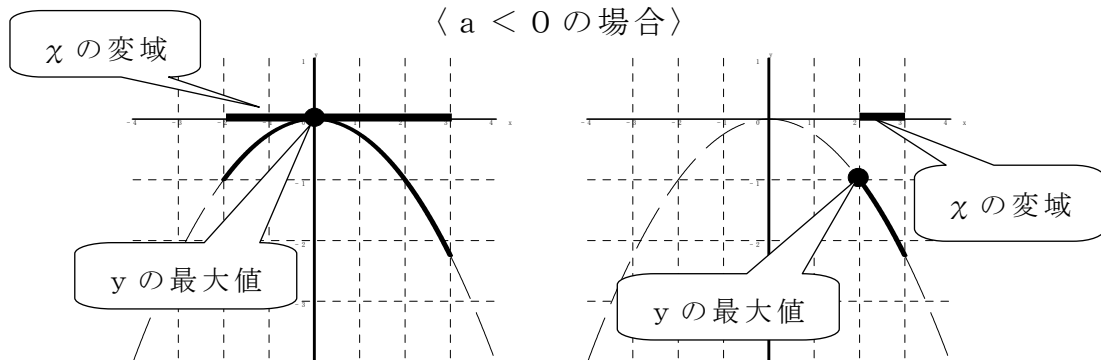
- (5) 「 x の変域によっては、 y の変域で0が最小値にならない場合はあるか？」と問う。少し考えさせると、 x の変域に0が入っていなければ y の最小値が0にならないという意見が出てくる。言葉だけでは理解できない生徒もいるので、右の2つのグラフを比較させながら x の変域と y の変域の関係を全体で確認する。

更に「 $y = ax^2$ の a の値が負になると何が変わるのか？」と問う。 a の値が負の場合のグラフを示して、 x の変域に0が入っているとき y の最大値が0になるなど、 x の変域と y の変域の関係を全体で確認していく。

〈 $a > 0$ の場合〉



〈 $a < 0$ の場合〉



その後、次のことを確認する。

- $y = ax^2$ では、 y の値が $x = 0$ を境に減少から増加、または増加から減少するから、 x の変域内に $x = 0$ があるときは、 $y = 0$ が最大または最小の値になる。

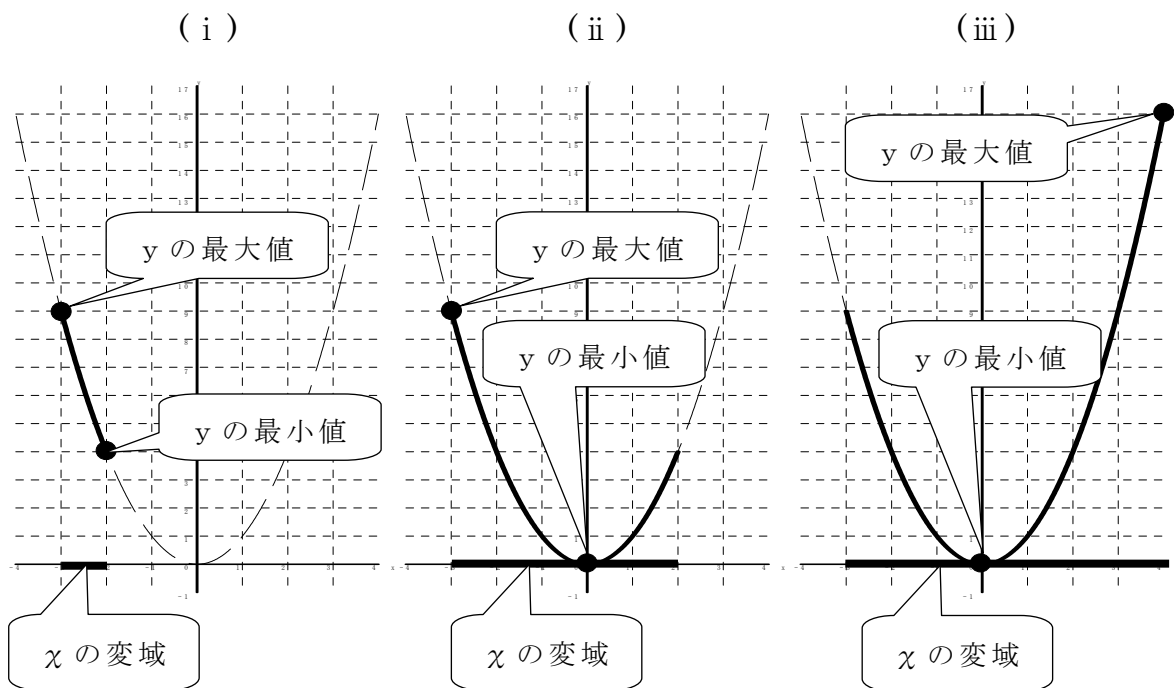
(6) 右のような練習問題に取り組ませる。

少し時間をとって考えさせると、 y の変域の求め方は、 x の変域によって次の(i)から(iii)の場合に分けられることが生徒から出され、より深い理解につなげることができる(グラフと関連させて理解させる)。

(i) \square が -3 より大きく 0 より小さいとき
(ii) \square が 0 以上 3 以下のとき
(iii) \square が 3 より大きいとき

練習問題

$y = x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq \square$ のとき、 \square の値が色々に変化することで y の変域はどのように変わるか?



(i)~(iii)のグラフから、 y の最大値と最小値の決まり方の特徴を見いだす生徒が出てくる。生徒どうして特徴を説明させたり、 a が負の数の場合について場合分けする問題に取り組むことで、より深い学びにつながる。

(7) 教科書を開かせて、本時の内容を振り返るとともに、練習問題に取り組ませて定着を図る。